ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

....

ĐINH THỊ THU HUẾ

BÀI TOÁN PHÂN HOẠCH SỐ NGUYÊN DƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

....

ĐINH THỊ THU HUẾ

BÀI TOÁN PHÂN HOẠCH SỐ NGUYÊN DƯƠNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Danh mục các hình vẽ

MỞ ĐẦU

Bài toán biểu diễn số nguyên dương dạng tổng các số nguyên dương đã có lịch sử lâu đời. Leibniz là người đầu tiên nghiên cứu bài toán này, sau đó Euler, Sylvester, Hardy, Ramanujan, Andrews... là các nhà toán học có những đóng góp quan trọng. Bài toán nói trên xuất hiện trong nhiều vấn đề khác nhau của toán học và là đề tài nghiên cứu sôi nổi cho đến tận ngày hôm nay (Các công trình của Okounkov, Giải thưởng Fields 2006, có liên quan đến việc ứng dụng bài toán trên trong xác suất, hình học đại số, cơ học thống kê,...). Dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TSKH. Hà Huy Khoái, tác giả chọn đề tài: *"Bài toán phân hoạch số nguyên dương"*.

Luận văn có mục tiêu giới thiệu bài toán biểu diễn số nguyên dương dưới dạng tổng, từ lịch sử phát triển và những kết quả kinh điển, đến một số kết quả gần đây. Luận văn cũng trình bày một số bài toán liên quan đến bài toán nói trên.

Với mục tiêu trên, tác giả tiến hành nghiên cứu hai chương:

Chương 1. Một số kết quả kinh điển về bài toán phân hoạch số nguyên dương

1.1. Lịch sử phát triển của bài toán phân hoạch số nguyên dương

1.2. Một số kết quả kinh điển

Chương 2. Một số lớp bài toán phân hoạch số nguyên khác nhau và một số bài toán liên quan

2.1. Phân hoạch thành những phần phân biệt và ánh xạ đối hợp của Franklin

2.2. Phân hoạch thành những phần lẻ và song ánh Sylvester

2.3. Một số bài toán liên quan.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn, giúp đỡ tận tình của GS.TSKH. Hà Huy Khoái, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn và kính trọng sâu sắc đối với Giáo sư. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Phòng sau đại học và Khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường. Xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân trong thời gian qua.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song do thời gian và trình độ còn hạn chế nên bản luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý độc giả để bản luận văn này được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2017

Tác giả

Đinh Thị Thu Huế

Chương 1

Một số kết quả kinh điển về bài toán phân hoạch số nguyên dương

Mục đích của chương này là trình bày lịch sử phát triển và một số kết quả kinh điển về bài toán phân hoạch số nguyên dương. Tài liệu tham khảo chính của Chương là [3], [4] .

1.1 Lịch sử phát triển của bài toán phân hoạch số nguyên dương

Phân hoạch lần đầu tiên xuất hiện trong bức thư tay của Leibnitz viết vào năm 1669 gửi cho John Bernoulli, ông hỏi Bernoulli *liệu có kiểm tra nhanh được số cách viết một số nguyên dương đã cho thành tổng của hai hay nhiều số nguyên?* Từ đây lý thuyết phân hoạch được hình thành và là một nhánh quan trọng của lý thuyết số. Khái niệm phân hoạch các số nguyên không âm cũng thuộc về toán học tổ hợp (xem [4]).

Định nghĩa 1.1 (xem [4])**.** Một phép phân hoạch của số nguyên dương n là một dãy không tăng hữu hạn của các số nguyên dương $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r$ sao cho $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$, λ_i được gọi là các phần hoặc các số hạng của phân hoạch. Đôi khi phân hoạch $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ được kí hiệu bởi λ và ta viết là $\lambda \vdash n$ hoặc $\mid \lambda \mid= n$.

Định nghĩa 1.2 (xem [4])**.** Hàm phân hoạch $p(n)$ là số các phân hoạch của n.

Khi xét phép phân hoạch của n có một số chú ý sau (xem [4]):

Chú ý 1.1. Chúng ta thấy 0 có một phân hoạch, phân hoạch rỗng, nó không có phần tử nào. Ta quy ước $p(0) = 1$.

Chú ý 1.2. Thường viết tắt phần lặp bằng cách sử dụng lũy thừa.

Chú ý 1.3. Theo định nghĩa phân hoạch thứ tự không quan trọng. 4+3 và 3+4 đều là một phân hoạch của 7. Một tập hợp có thứ tự được gọi là một phép hợp thành. Do đó, 4+3 và 3+4 là hai phép hợp thành khác nhau của 7.

Ví dụ 1.1. Có năm phân hoạch của số 4 là $4, 31, 2^2, 21^2, 1^4$. Có bảy phân hoạch của số 5 là $5, 41, 32, 31^2, 2^21, 21^3, 1^5$.

Leibnitz quan sát có 3 phân hoạch của 3 $(3, 21, 1^3)$, 5 phân hoạch của 4. Sau đó ông cũng quan sát được có 7 phân hoạch của 5 và 11 phân hoạch của 6. Điều này gợi ý, số phân hoạch của n bất kỳ luôn là một số nguyên tố. Tuy nhiên, điều này không đúng khi tính toán được 15 phân hoạch của 7. Như vậy ngay từ những bước khởi đầu, bài toán phân hoạch đã dẫn đến câu hỏi mở mà đến tận ngày hôm nay vẫn chưa có lời giải: tồn tại vô hạn hay hữu hạn n sao cho số phân hoạch n là một số nguyên tố? Bên cạnh đó là những câu hỏi về $p(n)$ như: cấp tăng của nó như thế nào? Tính chẵn lẻ của nó? Liệu nó có những tính chất số học đặc biệt nào? Có cách nào để tính $p(n)$ hiệu quả không?(xem [3]).

Từ đây thiết lập những chủ đề khác nhau và lý thuyết phân hoạch được phát triển xa hơn bởi nhiều nhà Toán học vĩ đại, nổi bật trong số họ là Euler, Gauss, Jacobi, Cayley, Sylvester, Hardy, Ramanujan, Rademacher, Schur, Mac Mahon, Gupta, Gordon, Andrews, Stanley... Công việc nghiên cứu của Ramanujan cùng Hardy thực sự cách mạng hóa việc nghiên cứu về thuyết phân hoạch. Bởi những ứng dụng vĩ đại của nó trong các lĩnh vực khác nhau như xác suất thống kê, vật lý cơ học... lý thuyết phân hoạch trở thành lĩnh vực nghiên cứu sôi nổi của lý thuyết số.

Có thể thấy $p(n)$ tăng rất nhanh theo n. Thậm chí, nếu một người nào đó có thể tập trung làm việc một cách hoàn hảo thì cũng phải mất 126000 năm để viết tất cả 3972999029388 phân hoạch của 200. Ramanujan đã tự hỏi mình một câu hỏi cơ bản: Chúng ta có thể tìm $p(n)$ mà không cần viết tất cả các phân hoạch của n không?" Câu hỏi này đã được Hardy và Ramanujan trả lời vào năm 1918. Họ đã đưa ra công thức gần đúng cho $p(n)$. Tuy tiên D.H.Lehmer nhận thấy chuỗi Hardy – Ramanujan phân kỳ. Năm 1937, H. Rademacher thay thế điều kiện để nhận được $p(n)$ là chuỗi hội tụ. Hardy – Ramanujan – Rademacher lập ra công thức mở rộng cho $p(n)$ nổi tiếng, đó là kết quả đáng ghi nhận nhất trong toán học. Nó cho thấy sự tương tác giữa một hàm số học $p(n)$ và một số kỹ thuật tính toán. Nó không chỉ là công thức lý thuyết cho $p(n)$ mà còn là công thức cho phép tính tương đối nhanh (xem [4]– Tr 6).

Một số giá trị của $p(n)$

$$\begin{array}{rcccccccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 20 & 50 & 100 & 200 \\ p(n): & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 30 & 627 & 204226 & 190569292 & 3972999029388 \end{array}$$

Nhiều khi chúng ta chỉ cần quan tâm đến những bài toán không nhất thiết phải xét đến tất cả các phân hoạch của n mà chỉ các phân hoạch đặc biệt nào đó của n.

Ví dụ 1.2. Trong số 22 phân hoạch của số 8, chỉ có sáu phân hoạch chứa các phần là số lẻ $71, 53, 51^3, 3^21^2, 31^5, 1^8$ và cũng có 6 phân hoạch trong đó các phần tử phân biệt $8, 71, 62, 53, 521, 431$.

Về vấn đề này đã được Euler bắt đầu nghiên cứu vào năm 1674. Ph.Naudé hỏi Euler về phân hoạch một số nguyên dương n thành m phần nhất định. Đặc biệt, Naudé đã hỏi ông có bao nhiêu phân hoạch của 50 thành 7 phần riêng biệt. Câu trả lời đúng là 522, điều này khó có khả năng thu được bằng cách viết ra tất cả các phân hoạch của 50 thành 7 phần. Để giải quyết vấn đề này Euler đã khám phá và giới thiệu hàm sinh của hàm phân hoạch, các đồng nhất thức, định lí số ngũ giác, đó là sự đổi mới quan trọng nhất trong toàn bộ nghiên cứu về phân hoạch. Hầu hết mọi phát hiện về phân hoạch đều nhờ vào sự bắt đầu của Euler (xem [3]).

Từ cuối thế kỉ XVIII cho tới nửa đầu thế kỉ XIX không xuất hiện nhiều bước tiến đáng ghi nhận trong nghiên cứu về phân hoạch. Tất nhiên điều tương tự không xảy ra với toán học nói chung. Đã có sự xuất hiện những nghiên cứu về lý thuyết biến phức và lý thuyết của hàm eliptic và chúng đã mang lại ảnh hưởng sâu sắc tới nghiên cứu về phân hoạch. Legendre, Gausse, Cauchy và những nhà toán học vĩ đại khác đã tìm ra được lời giải thích cho công trình của Euler.

Trong một thế kỷ từ năm 1750 – 1850, trọng tâm chính của việc nghiên cứu là đưa ra công thức tường minh cho $p_m(n)$, số phân hoạch n thành các phần không lớn hơn m. P. Paoli, A. Dc Morgan, F.W. Herschsl, T. Kirkmar và H. Warburton, Cayley, Sylvester...đã nghiên cứu $p_m(n)$ với những giá trị nhỏ xác định của m và họ đưa ra được một số công thức nhất định. Tuy nhiên, Sylvester mới là nhà toán học tiếp theo đưa ra được cái nhìn thực sự mới cho vấn đề này(xem [3]– Tr 5). Sau khi xem xét một vài cách mà phân hoạch thực sự có thể được đưa ra dưới dạng hình học, ông khẳng định rằng phân hoạch $5 + 5 + 4 + 3 + 3$ có thể được biểu diễn thuận tiện hơn nhiều dưới dạng:

$$\begin{array}{ccccc} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & & \\ * & * & * & & \end{array}$$

Sylvester gọi cách biểu diễn này là biểu đồ Ferrers của phân hoạch, đặt tên theo nhà toán học N.M. Ferrers. Ông đã chú ý rằng ta có thể đếm số nút ở các cột thay vì các hàng. Lấy ví dụ như biểu đồ ở trên có thể cho ta phân hoạch $5 + 5 + 5 + 3 + 2$. Hai phân hoạch từ cùng một biểu đồ như trên được gọi là liên hợp.

Định nghĩa 1.3 (xem [3])**.** Phân hoạch n là tự liên hợp nếu liên hợp của nó trùng với chính nó.